Бондаров Михаил Николаевич
Учитель физики лицея №1501 и ГОУ ЦО «Технологии обучения» г. Москвы.

О балках, брёвнах и... храбром портняжке

Статья посвящена анализу условий и решений двух задач статики. В первой из них неожиданно выясняется, что верное применение разных физических законов иногда может привести к разным ответам. Во второй рассмотрено равновесие твёрдого тела на трёх расположенных в одной вертикальной плоскости опорах, когда для решения приходится вводить дополнительное предположение о характере деформации опор.

1. Встреча с задачей, ответ в которой зависит от способа решения

На уроках Анатолия Ивановича была замечательная традиция: каждый его ученик мог приносить в класс на обсуждение нерешённые проблемы и быть уверенным, что они обязательно будут разрешены. Обычно для этого отводилась последняя треть урока. Так случилось и на этот раз, когда Олег предложил:

– Давайте разберём сегодня задачу о равновесии тел. Она вроде бы не очень сложная, но мой ответ почему-то не совпадает с приведённым в задачнике.

– Что ж, интересно, – улыбнулся учитель, – познакомьте тогда нас с задачей и Вашим способом её решения.

Олег вышел к доске, начертил рисунок 1 и прочитал условие.

Задача 1. Тяжёлая балка массой m_1 шарнирно закреплена на конце O. Балка удерживается горизон-

тально с помощью нити, прикреплённой к другому концу балки и перекинутой через неподвижный блок, как показано на рисунке 1. Нить образует с вертикалью угол α. Определите реакцию шарнира, если масса m_2 груза известна.

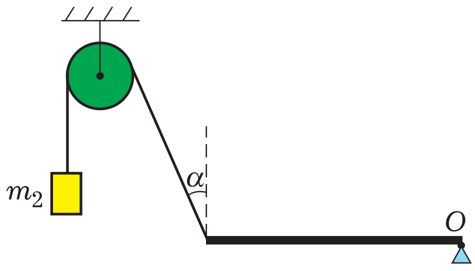

Рис. 1

– Решал я её, как обычную статическую задачу, – начал Олег и продолжил. – Так как груз m_2 неподвижен, то сила натяжения нити $T = m_2 g$, а поскольку нить невесома (об этом в условии не сказано, но, конечно же, неявно предполагается), то на левый конец балки со стороны нити действует такая же по модулю сила. Балка тоже неподвижна, следовательно, проекция силы натяжения на горизонтальную ось компенсируется проекцией силы реакции на ту же ось (рис. 2):

$$R_x = m_2 g \sin\alpha.$$

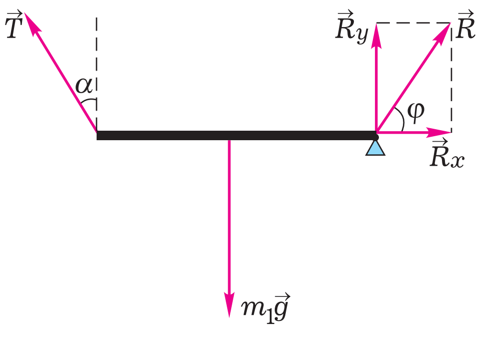

Рис. 2

Для нахождения вертикальной проекции силы реакции используем правило моментов относительно центра масс балки (мы учли при этом, что, как предполагается обычно, балка считается однородной, значит, её центр масс расположен в геометрическом центре, и плечи вертикальных проекций сил натяжения и реакции равны):

$$R_y = m_2 g \cos\alpha.$$

Теперь для нахождения искомой силы реакции осталось лишь применить теорему Пифагора:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}.$$

Откуда, после подстановки выражений для R_x и R_y и с учётом тригонометрического тождества

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

получим

$$R = m_2 g.$$

Надо, конечно, ещё и направление этой силы найти, но в ответе стоит другое выражение для её модуля.

И он выписал на доске авторский ответ:

«$R = g\sqrt{m_2^2 \sin^2\alpha + (m_1 - m_2\cos\alpha)^2}$; вектор направлен под углом

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left[(m_1 - m_2\cos\alpha)/m_2\sin\alpha\right]$$

к горизонту».

Наступила маленькая пауза, которую прервал Дима:

– Да... Сходства маловато! К тому же в твой ответ входят не все данные из условия.

– Но мы уже не раз встречались с подобными задачами, их так и называют «задачи с избыточными данными в условии». Даже в вариантах ЕГЭ прошлых лет они встречаются. Может быть, и эта задача такая же, – не слишком уверенно произнёс Вася.

– А что если попробовать решить другим способом, – предложил Алёша. – Почему бы для определения R_y не использовать условие равновесия балки вдоль вертикальной оси. Это же совсем несложно.

Он вышел к доске, написал

$$R_y = m_1 g - m_2 g \cos\alpha$$

и сказал:

– После чего снова используем теорему Пифагора:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} =$$

$$= g\sqrt{m_2^2 \sin^2\alpha + (m_1 - m_2\cos\alpha)^2}.$$

Теперь ответы совпадают!

– Позвольте, а где же ошибка в решении Олега? – спросил Вася.

– А зачем он использовал правило моментов относительно центра масс, ведь балка вокруг него не может вращаться! – крикнул кто-то из задних рядов.

– Ну и что! Правило моментов справедливо относительно любой оси, – тут же послышалось с разных мест.

Тогда слово взял Анатолий Иванович:

– Давайте рассмотрим прежде внешне совсем непохожую задачу, но скоро вы увидите, что я выбрал её не случайно.

Задача 2. Автомобиль, трогаясь с места с ускорением 4 м/с^2, за первые 4 с набирает скорость 20 м/с. Определите пройденный им путь.

Задача кажется совсем простой, однако есть в ней особенность. Итак, если путь рассчитывать по формуле

$$s = \upsilon_0 t + \frac{at^2}{2},$$

то получится 32 м. Если же для расчёта использовать формулу

$$s = \frac{\upsilon^2 - \upsilon_0^2}{2a},$$

то ответ будет иным: 50 м.

Какое же решение верное? Давайте приглядимся к условию повнимательнее!

– Смотрите: данные в задаче не согласованы, – заговорил Дима. – Зная изменение скорости и время, можно найти величину ускорения:

$$a = \frac{\upsilon - \upsilon_0}{t} = \frac{20 - 0}{4} = 5 \text{ (м/с}^2\text{)},$$

а она не совпадает с заданным в условии значением.

– Это Вы очень хорошо заметили, – обрадовался Анатолий Иванович. – Таким образом, задача оказалась не просто с избыточными данными. Если бы, например, вместо конечной скорости была задана масса автомобиля, то задача решалась бы по первой формуле, а масса оказалась бы просто лишней в условии. Беда в том, что *задача переопределена*, то есть некоторые заданные в условии величины можно найти (выразить) через другие заданные в условии величины. В задаче с автомобилем ускорение можно выразить через скорость и время, скорость – через ускорение и время, время – через ускорение и скорость. Если заданные в условии величины (обычно их численные значения) противоречат друг другу, то нам попалась *некорректная задача*. Задача с автомобилем – некорректная задача. Задачу с балкой при желании можно считать корректной, поскольку не заданы численные значения величин и есть возможность сказать, что они подразумеваются непротиворечивыми. Но от этого не легче, так как ответ зависит от способа решения, что неудобно для всех.

– Выходит, что принесённая Олегом задача из разряда таких же, переопределённых, – заметил Дима. – Если в условии этой задачи не задавать m_1, то задача станет определённой и получим ответ Олега. Если не задавать m_2, то получится другая задача с ответом, выраженным через m_1 и α. А что делать, если похожая задача встретится на экзамене или олимпиаде?

– Если подобное произойдёт, то виноваты, конечно же, авторы – можно смело идти на апелляцию. К счастью, такие неувязки в условиях встречаются редко.

Кстати, обратите внимание: если в задаче использовать симметрию относительно центра масс балки, то ответ (при задании только m_1 или m_2) становится практически очевидным, причём угол наклона силы реакции к вертикали тот же, что и у нити, то есть α.

К сожалению, через минуту урок закончится, поэтому мы не успеем сейчас рассмотреть ещё одну интересную задачу, весьма полезную для закрепления правил решения задач статики, – попробуйте решить её дома.

2. Три человека несут бревно

Задача 3. Два человека несут бревно, поддерживая его на одинаковых расстояниях от концов. Третий, желая помочь, берётся за конец бревна впереди первого. Будет ли легче несущим бревно? (Или: что скажет второй?)

Следующий урок начался с разбора домашней задачи. Первым слово взял Гриша:

– Пусть для простоты расчётов бревно будет длиной 4 м, а расстояния между несущими людьми 2 м. Тогда из симметрии очевидно, что первоначальная нагрузка на каждого человека

$$F_1 = F_2 = \frac{1}{2}mg.$$

После того, как третий человек взялся за бревно, оно перестаёт давить на первого (будем считать для простоты, что третий немного выше первого и первый, воспользовавшись этим, перестал поддерживать бревно). Тогда симметрия в расположении несущих нарушается (на рисунке 3 силы N_3 и N_2 действуют на балку со стороны третьего и второго человека).

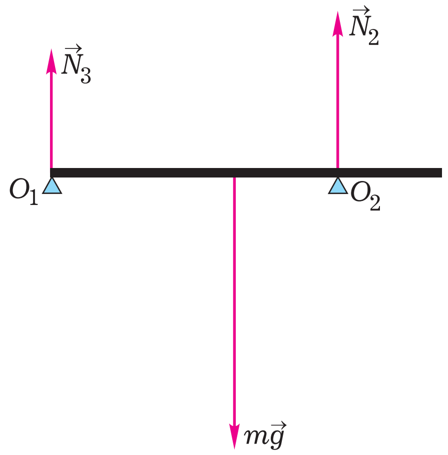

Рис. 3

Теперь запишем правило моментов для точки O_1, где третий человек касается бревна, подставив длины соответствующих плеч в метрах:

$$N_2 \cdot 3 - mg \cdot 2 = 0,$$

откуда

$$N_2 = \frac{2}{3}mg.$$

Аналогично, выбрав в качестве оси вращения точку O_2, где находится второй человек, получим

$$N_3 \cdot 3 - mg \cdot 1 = 0 \Rightarrow N_3 = \frac{1}{3}mg.$$

По третьему закону Ньютона

$$F_2 = N_2 \text{ и } F_3 = N_3,$$

следовательно, нагрузка на второго человека возрастёт на $\frac{1}{6}mg$, и он едва ли скажет что-то приятное для третьего.

Ребята согласились с решением Гриши, но Анатолий Иванович как-то загадочно продолжал смотреть на них.

– Вам не нравится, что я рассмотрел только частный случай, когда длина бревна равна 4 м? – спросил учителя Гриша. – Неужели это повлияет на качественный ответ, и при некоторой другой длине нагрузка на второго может не увеличиться, а, наоборот, уменьшиться?

– Нет, в общем случае ответ будет качественно тот же: второму человеку станет тяжелее, если третий возьмётся за бревно впереди первого, освободив его от ноши. Однако Вы не рассмотрели возможность распределения нагрузки на всех троих. В этом случае решение усложняется. Давайте перейдём к его анализу.

Сделаем сначала рисунок 4, на котором изобразим все силы, действующие на бревно.

При этом пренебрежём деформациями бревна, будем считать также (условно, в виде модели), что рост несущих людей одинаков, а их руки (или плечи) ведут себя как сжатые пружины одинаковой жёсткости. На рисунке для наглядности сильно увеличим деформации этих пружин.

Теперь запишем условие равновесия для сил и моментов (ось вращения O – центр масс бревна):

$$N_1 + N_2 + N_3 = mg,$$

$$N_1 \cdot 1 + N_3 \cdot 2 - N_2 \cdot 1 = 0.$$

Как видим, двух записанных выше уравнений явно не хватает для нахождения трёх неизвестных. Такие задачи в статике называются *статически неопределёнными задачами*. Для нахождения однозначного решения требуются ещё какие-то дополнительные сведения, которые должны быть в условии задачи.

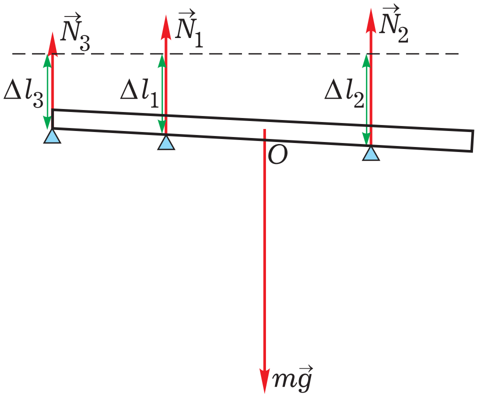

Рис. 4

Следовательно, в задаче с балкой необходимо использовать ещё какое-то дополнительное условие. Если считать деформации наших мысленных пружин упругими, то выполняется соотношение:

$$N_2 : N_1 : N_3 = \Delta l_2 : \Delta l_1 : \Delta l_3,$$

где Δl_1, Δl_2 и Δl_3 – величины сжатия первой, второй и третьей пружин соответственно.

Из рисунка видно, что

$$\frac{\Delta l_2 - \Delta l_3}{\Delta l_2 - \Delta l_1} = \frac{3}{2},$$

откуда

$$3\Delta l_1 = \Delta l_2 + 2\Delta l_3.$$

Тогда с учётом нашего предположения об упругости пружин получим

$$3N_1 = N_2 + 2N_3.$$

Таким образом, получилась система уравнений:

$$\begin{cases} N_1 + N_2 + N_3 = mg, \\ N_1 \cdot 1 + N_3 \cdot 2 - N_2 \cdot 1 = 0, \\ 3N_1 = N_2 + 2N_3. \end{cases}$$

Решая её, находим

$$N_1 = \frac{2}{7}mg,\ N_2 = \frac{4}{7}mg,\ N_3 = \frac{1}{7}mg.$$

По третьему закону Ньютона нагрузка на второго человека

$$F_2 = N_2 = \frac{4}{7}mg.$$

И снова видим, что после появления третьего человека второму приходится прикладывать большее усилие, правда, теперь сила возрастёт всего на $\frac{1}{14}mg$.

Попробуем теперь подвести краткий итог решению этой задачи, – сказал в заключение Анатолий Иванович. – Несмотря на то, что Гриша решил её для частного случая, можно показать, что при любом расположении людей различного роста вдоль бревна нагрузка на второго после прихода третьего всегда увеличится, если третий станет в любом месте перед первым. В реальной ситуации нагрузка на второго человека зависит от того, какую нагрузку возьмёт на себя пришедший третий. Но нагрузка на второго обязательно увеличится.

В это время руку поднял всё время молчавший Филипп:

– А я нашёл ответ в домашней задаче с помощью «эффекта храброго портняжки».

– Это что ещё за эффект? – удивились ребята.

– А помните, как в сказке братьев Гримм портняжка нёс огромный дуб вместе с грозным великаном, которого все боялись? Он сказал великану: «Вы беритесь за ствол, а я понесу ветки, ведь их куда больше и они тяжелее». Великан и взвалил на себя дерево, расположив для удобства его центр масс у себя на плече. А портняжка уселся среди ветвей и бесплатно прокатился. Так вот, если несут два человека, то чем ближе один из них к центру масс, тем большая нагрузка приходится на него. Это я и назвал «эффектом храброго портняжки». С его помощью становится очевидным качественный ответ на вопрос домашней задачи.

– Вот и я сегодня узнал кое-что новенькое, – улыбнулся Анатолий Иванович. – Теперь можно подводить итоги.

1. Любую задачу, вызвавшую серьёзные затруднения, полезно анализировать (можно в одиночку, ещё лучше с учителем или товарищами).

2. Если ответ не получается, то причины могут быть разные: грубая ошибка в решении, недочёт в расчёте, возможна и опечатка в задачнике... Очень редко можно наскочить на переопределённую задачу.

3. При разборе задачи с балкой, условие которой было дополнено, мы познакомились с новым способом решения – желательно потренироваться в применении этого способа.

Поэтому в качестве домашнего задания вы получите аналогичную задачу.

Задача 4. Прямая балка длиной 1 м и массой 150 кг подвешена на трёх упругих вертикально натянутых тросах, два из которых прикреплены к концам, а третий держит её посередине. Тросы нарезаны из одного куска и в нерастянутом состоянии были одинаковой длины. Найдите силы натяжения тросов, если центр тяжести балки находится на расстоянии 0,3 м от одного из её концов.

Указание. Растяжения тросов малы, и для упрощения расчётов тросы можно считать вертикальными. Деформациями балки пренебречь.

Ответ. 800 Н; 500 Н; 200 Н.